رياضيـــــات

المجموعة عدد 08

République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Et de la Recherche Scientifique
Université de Monastir
Concours de Réorientation Session mars 2023

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة المنستير
مناظرة إعادة التوجيه الجامعي دورة مارس 2023

الاختصاص: الإجازة في التربية والتعليم	مادة الاختبار: إختبار في الرياضيات
تاريخ إجراء الاختبار: 28 مارس2023	مدّة الاختبار: 2 ساعات (من الساعة 13.30 إلى الساعة 15.30)
الضارب:1	

Exercice n°1 (3,5 points)

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \text{ et } K = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$$

1) a) Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$

par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

b) En déduire que $I = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

2) Montrer que $I + J = K$.

3) a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = \sqrt{2} - J$.

b) Déduire les valeurs de J et K.

Exercice n°2 (5,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \ln(x+1) - \ln(x+2)$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Montrer que la droite Δ: $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

5) Montrer que la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite : $y = \frac{3}{2}x$.

6) Tracer T et Δ et construire la courbe C_f .

Exercice n°3 (5,5 points)

Soit g la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x\ lnx}$. On désigne par C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, $g'(x) = \frac{-(1 + \ln x)}{(x\ lnx)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

3) Tracer C_g

4) Soit h la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $h(x) = ln\,(\,lnx\,)$

a) Calculer $h'(x)$.

b) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par C_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$.

Exercice n°4(5,5 points)

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - e^x + 1 > 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

(unité 2cm)

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) Montrer que la droite Δ: $y = 2x$ est une asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

3) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x (2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

4) Tracer T et Δ et construire la courbe C.