République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Gafsa, Université de Gabès,
Université de Jendouba, Université de Kairouan,
Université de Tunis, Université de Monastir

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة قفصة، جامعة قابس، جامعة جندوبة،
جامعة القيروان، جامعة تونس، جامعة المنستير

مناظرة إعادة التوجيه الجامعي (دورة مارس 2020)

Concours de Réorientation Universitaire (Session Mars 2020)

Filière: Licence en Education et Enseignement
Epreuve: Mathématiques
Date: 25 Mars 2020

Durée: 2H (de 14.00h jusqu'a 16.00h
Coefficient: 1

Epreuve: Mathématiques

Exercice 1 (5pts) :

1) a) Vérifier que $\left(2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = -2 + 2\,i\,\sqrt{3}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 - 2Z + \frac{3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

c) Déterminer dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation

$$(G) : Z^2 - 2Z + \frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

2) Soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E_\theta) : Z^2 - 2Z - 2\,i\,sin(\theta)\,e^{i\,\theta} = 0.$$

On note Z_1 et Z_2 les solutions de l'équation (E_θ).

a) Montrer que $arg(Z_1) + arg(Z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A, M et N les points d'affixes respectives :
$Z_A = 2$, $Z_M = 1 - e^{i\,\theta}$ et $Z_N = 1 + e^{i\,\theta}$.

a) Montrer que $Z_N = 2\,cos(\frac{\theta}{2})\,e^{i\,\frac{\theta}{2}}$, $\forall \theta \in]0, \pi[$.

b) En déduire une écriture exponentielle des nombres complexes Z_M et Z_N.

4) a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$.

b) Montrer que le quadrilatère $OMAN$ est un rectangle.

Exercice 2 (6pts) :

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - lnx$.

a) Étudier le sens de variation de g.

b) En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x - (lnx)^2$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de f et par Δ la droite d'équation $y = 2x$.

a) Vérifier que Δ est la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en son point d'abscisse 1.

b) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une direction asymptotique de direction qui est celle de Δ.

c) Étudier la position relative de Δ et $(\mathcal{C}_f)$.

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$.

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

c) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. En utilisant une intégration par partie montrer que $\mathcal{A} = e - 2$ $u.a.$

Exercice 3 (5pts):

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{\mathcal{U}_n}{(1+\sqrt{\mathcal{U}_n})^2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a $\mathcal{U}_n > 0$.

b) Montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est convergente et calculer sa limite l.

2) Soit $(\mathcal{V}_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\mathcal{V}_n = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{U}_n}}$.

a) Montrer que la suite $(\mathcal{V}_n)$ est arithmétique dont on précisera la raison.

b) Déduire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n puis retrouver la limite de $\mathcal{U}_n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathcal{U}_k$.

a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{U}_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

c) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.

d) En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 4 (4pts):

L'espace $\mathcal{E}$ étant rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(0,1,0)$; $B(1,0,-2)$; $C(0,0,-1)$ et $D(1,-1,0)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis calculer $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P et que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c) Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre $DABC$, puis déduire la distance de D à P.

2) a) Montrer qu'une équation du plan P est : $x - y + z + 1 = 0$.

b) Montrer que $H(0,0,-1)$ est le projeté orthogonale de D sur P.

3) On considère $S = \{M(x,y,z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0\}$

a) Vérifier que $E(2,-2,\sqrt{2})$ est un point de S.

b) Montrer que S est une sphère dont on caractérisera.

c) Montrer que P et S sont sécante suivant un cercle $\mathcal{C}$ que l'on caractérisera.