Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Monastir, Université de Gabes, Université de Gafsa,
Université de Jendouba, Université de Kairouan, Université de Tunis

Concours de Réorientation Session 2019

Epreuve : MATHEMATIQUES

Corrigé et barème

Exercice 1 6 points : 1+1+1+1+1+1

1) a) C - b) A - c) C
2) a) D - b) B - c) A

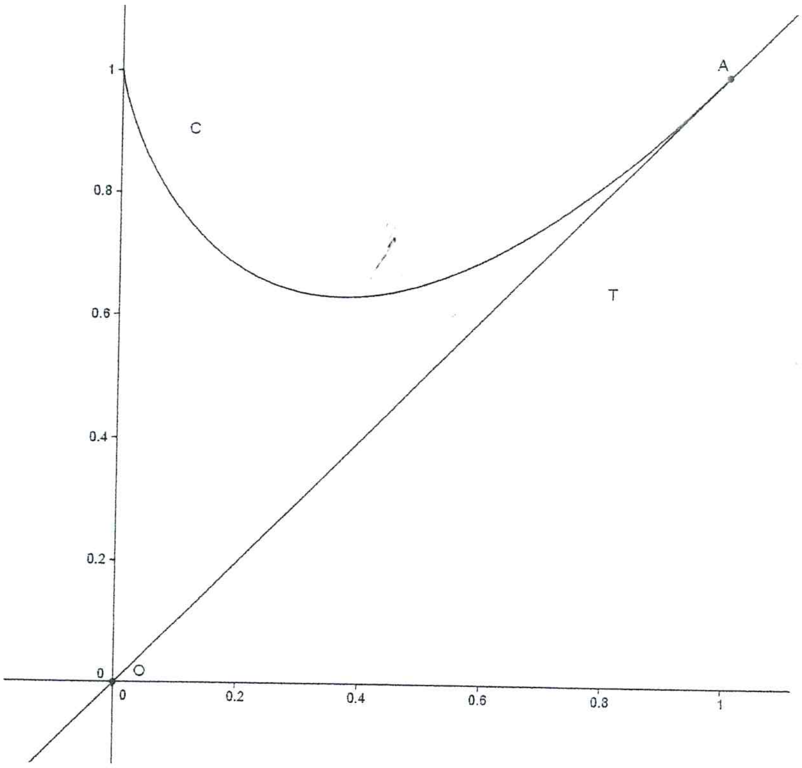
Exercice 2 (7 points)

Question	Corrigé	Barème
A 1-	f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x)=1-e^{-x}$; $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-e^{-x}>0 \Leftrightarrow 1>e^{-x} \Leftrightarrow -x<0 \Leftrightarrow x>0$; La fonction f est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.	0,5 x 2
A 2-	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	0,5
A 3-	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc (D) est asymptote oblique à (C) ; $f(x)-x=e^{-x}>0$ d'où (D) est au-dessous de (C).	0,5 x 2
B 1 -a)	$(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante	0,5
B 1- b)	pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geq 0$	0,5
B 2- a)	$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}\geq 0$; g est croissante sur $[0;+\infty[$ donc $g(x)\geq g(0) \Leftrightarrow x-\ln(1+x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x)\leq x$ (pour $x\geq 0$).	0,5 0,5
B 2- b)	$\frac{1}{n}\geq 0$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\leq\frac{1}{n} \underset{\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b \text{ si } \begin{cases} a>0 \\ b>0\end{cases}}{\Leftrightarrow} \ln(n+1)-\ln(n)\leq\frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln(n+1)\leq\ln(n)+\frac{1}{n}$.	0,5
B 3-	$f(x)=x+e^{-x} \Rightarrow f(\ln(n))=\ln(n)+e^{-\ln(n)}=\ln(n)+\frac{1}{e^{\ln(n)}}=\ln(n)+\frac{1}{n}$.	0,5
B 4- a)	Appelons P_n la propriété : « $\ln(n)\leq u_n$ » ; *Initialisation* : $\ln 1=0$ et $u_1=0$ donc on a bien : $\ln(0)\leq u_0$, soit P_1 est vraie (1) *Hérédité* : Supposons que, pour un n donné, P_n soit vraie, à savoir : $\ln(n)\leq u_n$; f étant croissante sur $[0;+\infty[$, on en déduit que $f(\ln(n))\leq f(u_n) \Leftrightarrow f(\ln(n))\leq u_{n+1}$;	0,25 0,25 0,25

	$f(\ln(n)) = \ln(n) + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$ d'après 3. et 2, d'où il résulte $\ln(n+1) \leq u_{n+1}$. Ainsi la propriété P_{n+1} est vraie. Conclusion : pour tout entier naturel n, $\ln(n) \leq u_n$	
B 4- b)	$\ln(n) \leq u_n$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.	0,25
B 7-	La suite $\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ converge vers 1 : $\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1) \underset{\ln n>0 \text{ car } n>1}{\Leftrightarrow} 1 \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq \frac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)}$; $\frac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{1+\ln\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{1+\ln(n)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} = 1$; Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1$. (On dit que la suite (u_n) est équivalente à la suite $(\ln n)$).	0,5

Exercice 3 (7 ponts)

Question	Corrigé	Barème
1 – a)	Quand x tend vers 0, $x \ln x$ tend également vers 0 et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.	0,5
1 – b)	$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$; d'où l'axe des ordonnées est une tangente à C.	0,5
1 – c)	Sur $]0\,;1]$ $x \ln x$ est négatif car $\ln x$ l'est ; on a donc $1 + x\ln x \leq 1$.	0,5
2 – a)	Pour $x \in]0\,;1]$; $f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$	0,75
2 – b)	Tangente en 1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) + 1 = x$.	0,5
3 – a)	$g'(x) = 0 + \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = \ln x$. Donc g est décroissante sur $]0\,;1]$ et comme $g(1) = 1 + 0 + 1 = 0$, $g(x) \geq 0$.	0,25 0,25 0,25
3 – b)	Le signe de $f(x) - x = g(x)$ est positif donc C est au-dessus de T.	0,5
4 -	Courbe C et T	0,75 = 0,5+0,25
5 - a)	Interpréter graphiquement le réel I(α)	0,25
5 – b)	$I(\alpha) = \int_\alpha^1 x \ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\alpha^2 \ln\alpha - \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}$.	1 4 x 0,25
5 – c)	$\lim\limits_{\alpha\to 0^+} I(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{2}\alpha^2 \ln\alpha - \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4} = 0 - 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	0,5
5 – d)	L'aire en question est l'aire du triangle – l'aire précédente, soit 1/2–1/4=1/4.	0,5


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
C
A
T
O